Aula 10

Movimento oscilatório II

Sumário

Oscilações

A Energia no Movimento Harmónico Simples

Um Oscilador Harmónico Simples Angular

O Pêndulo simples

O Movimento Harmónico Simples Amortecido

Oscilações Forçadas e Ressonância

Energia do Oscilador MHS

Supomos que um sistema de uma massa e uma mola se move sobre uma superfície sem atrito;

Concluímos que a energia total é constante;

A energia cinética é:

$E_C = ½\, mv^{2} = ½\, mw^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$

A energia potencial elástica é:

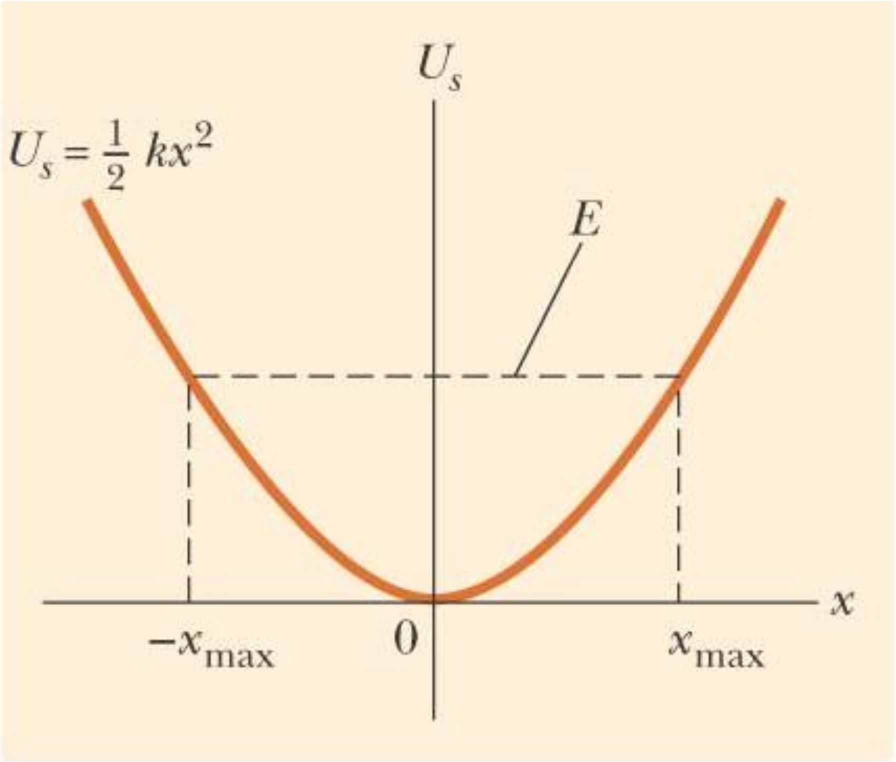
$U = ½\, kx^{2} = ½\, kA^2 \cos^2(\omega t + \phi)$

A energia total é: $E_C + U = ½\, kA^{2} = C^{te}$.

Energia do Oscilador MHS

A energia potencial é:

$$U = \frac{1}{2}kx^2$$



A energia mecânica total é constante:

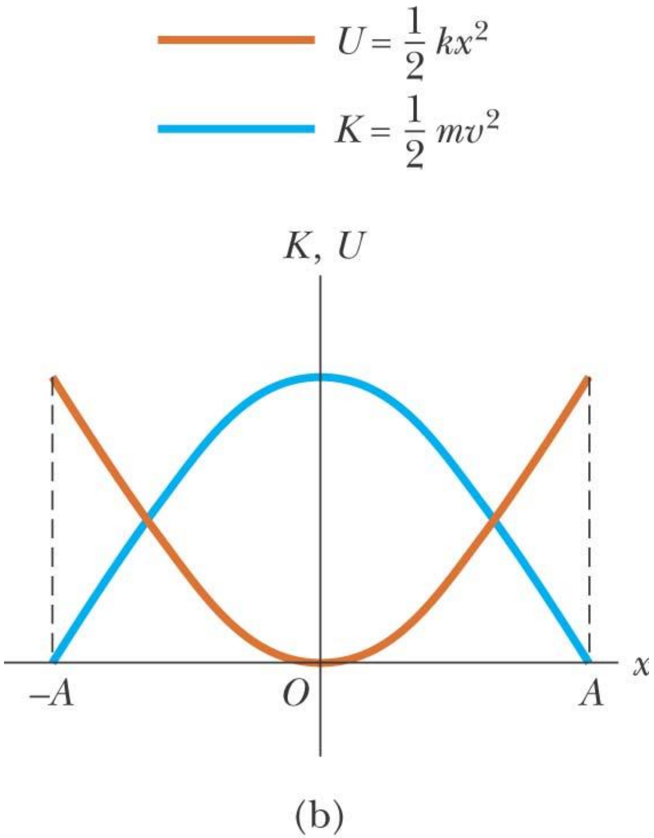
$$U = \frac{1}{2}kx_{max}{}^2$$

A energia mecânica total é proporcional ao quadrado da amplitude: $A = x_{max}$

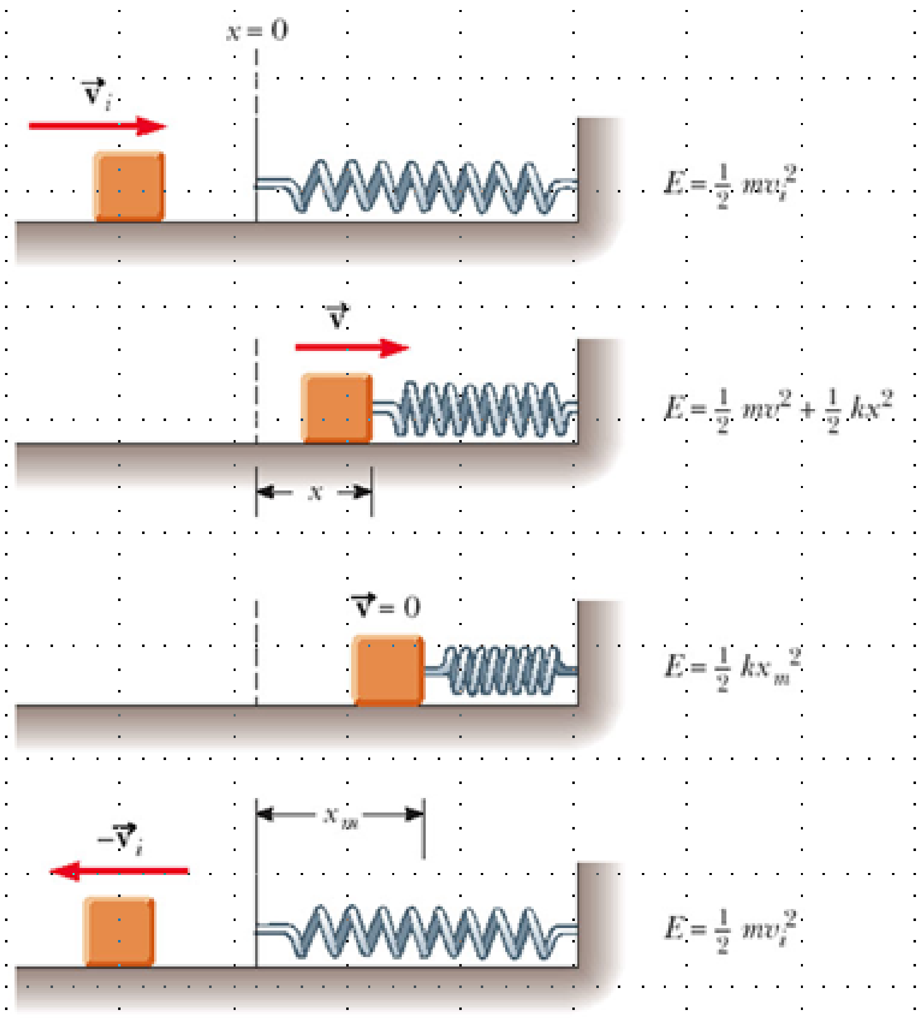
Energia do Oscilador MHS

A energia mecânica total é constante;

A energia está continuamente a ser transferida entre energia potencial acumulada na mola e energia cinética do bloco;



Energia do Oscilador MHS



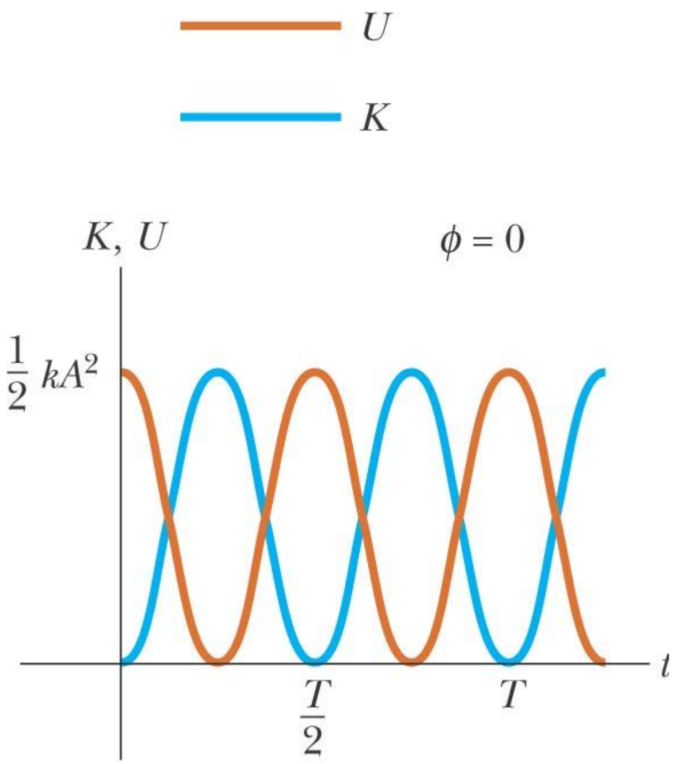
Energia do Oscilador MHS

À medida que o movimento continua, a troca de energia também continua;

A energia pode ser utilizada para encontrar a velocidade;

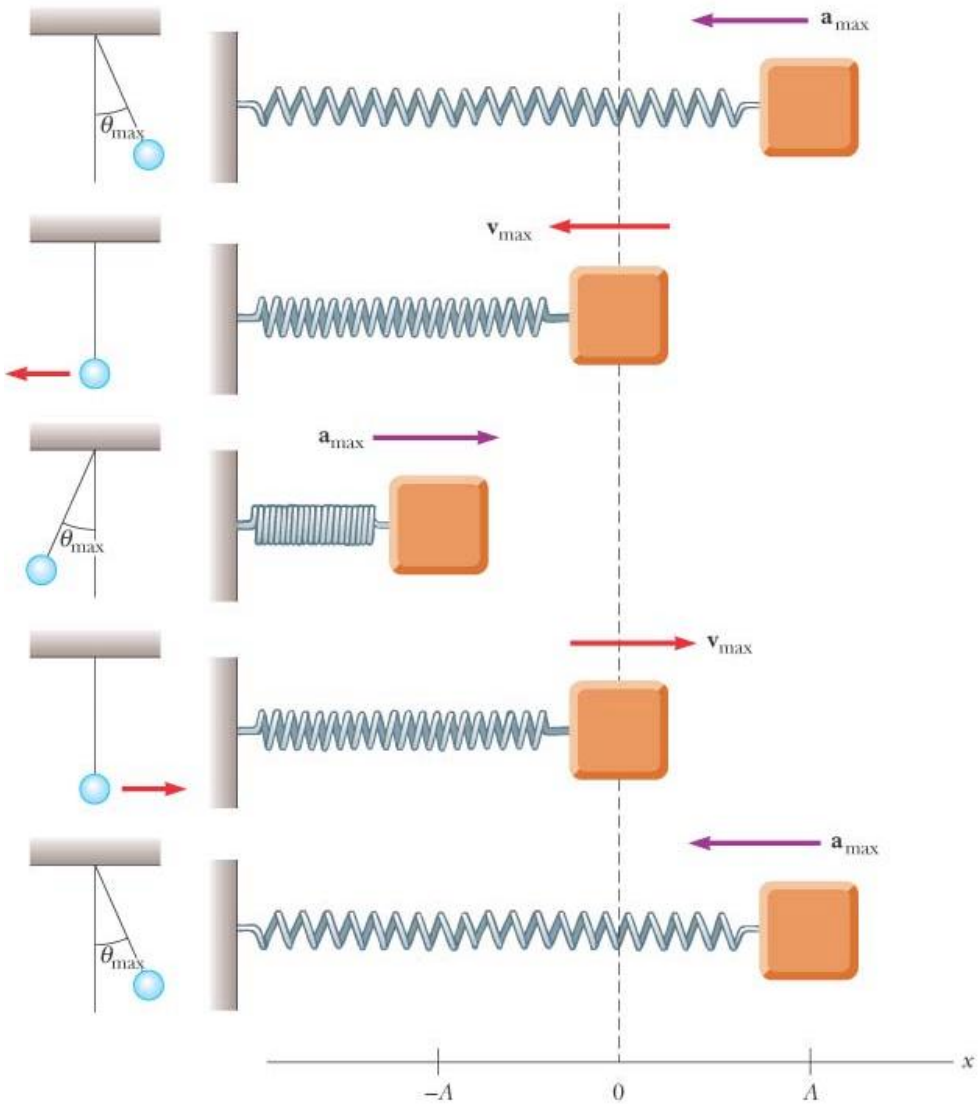
$$v = \pm\sqrt{\frac{k}{m}(A^2 - x^2)}$$

$$= \pm\omega\sqrt{A^2 - x^2}$$



(a)

Energia do Oscilador MHS, sumário



t	x	v	a	E_C	U
0	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$T/4$	0	$-\omega A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
$T/2$	$-A$	0	$\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$
$3T/4$	0	ωA	0	$\frac{1}{2}kA^2$	0
T	A	0	$-\omega^2 A$	0	$\frac{1}{2}kA^2$

O Pêndulo Simples

Um pêndulo simples também exibe movimento periódico;

O movimento ocorre no plano vertical e é provocado pela força gravítica;

O movimento é muito próximo de MHS se o ângulo é pequeno ($<10^{\circ}$).

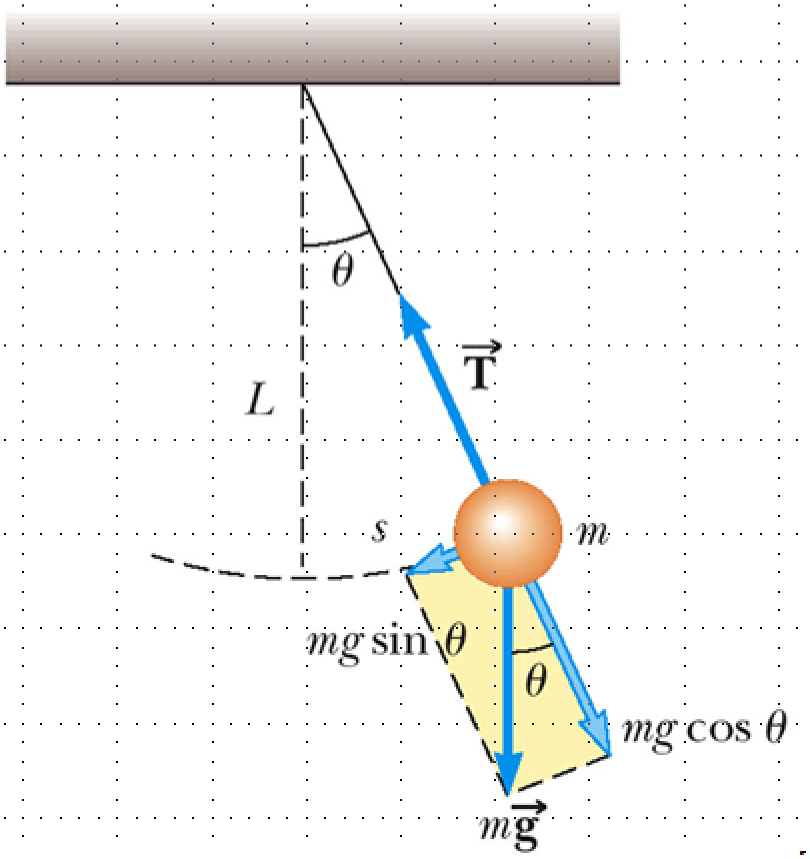
O Pêndulo Simples

A forças que actuam na esfera são $\vec{T}$ e $m\vec{g}$

$\vec{T}$ é a tensão da corda

$m\vec{g}$ é a força gravítica

A componente tangencial da força gravítica é uma força restauradora.



O Pêndulo Simples

Na direcção tangencial,

$$F_t = -mg\sin\theta = m\frac{d^2s}{dt^2}$$

O comprimento, *L*, do pêndulo é constante, e para valores pequenos de θ

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{L}\sin\theta = -\frac{g}{L}\theta$$

Isto confirma que o movimento é MHS

O Pêndulo Simples

A função $\theta(t)$ pode ser escrita na forma:

$$\theta = \theta_{max} \cos(\omega t + \phi)$$

A frequência angular é:

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

O período é:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

O Pêndulo Simples, Sumário

O período e a frequência de um pêndulo simples dependem apenas do comprimento da corda e da aceleração da gravidade;

O período é independente da massa;

Todos os pêndulos simples com o mesmo comprimento e no mesmo local oscilam com o mesmo período:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

O Pêndulo Simples, Massas diferentes

O Pêndulo Simples, comprimento diferente (4:1)

O Movimento Harmónico Simples e o Movimento Angular Uniforme

Oscilações Amortecidas

Em muitos sistemas reais, estão presentes forças não conservativas;

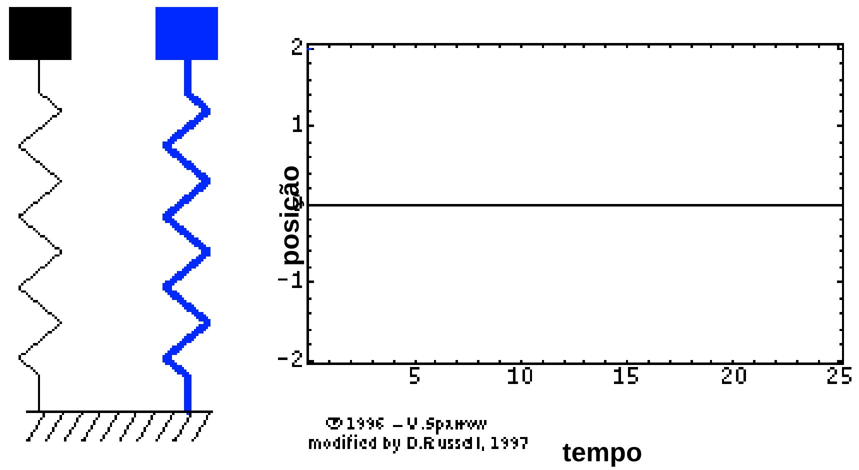
O sistema deixa de ser ideal;

O atrito é uma força não conservativa comum;

Neste caso, a energia mecânica do sistema diminui com o tempo, diz-se que o movimento é ***amortecido***.

Oscilações Amortecidas

Movimento oscilatório harmónico simples

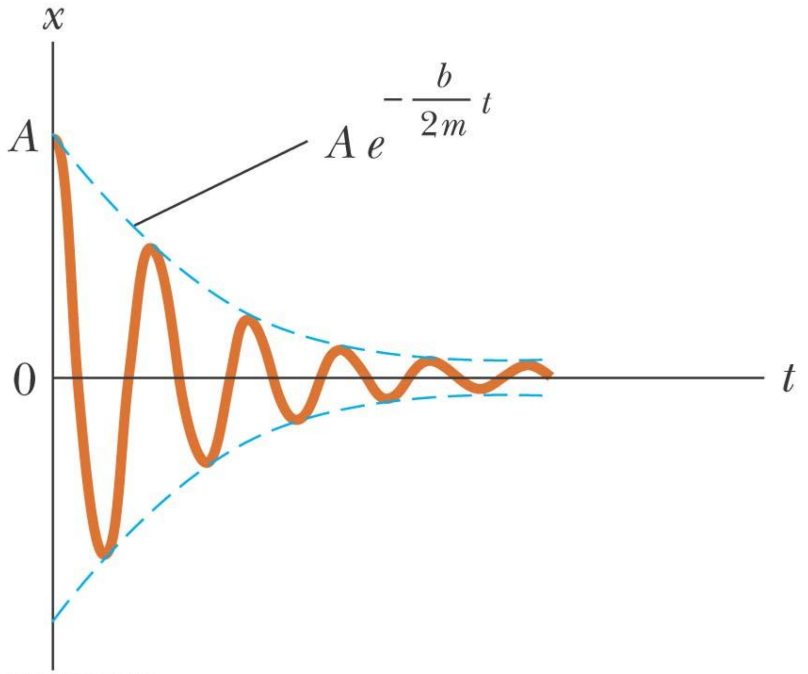


Movimento oscilatório harmónico amortecido

Oscilações Amortecidas

A amplitude diminui com o tempo;

A linha azul a tracejado é o ***envelope*** do movimento.



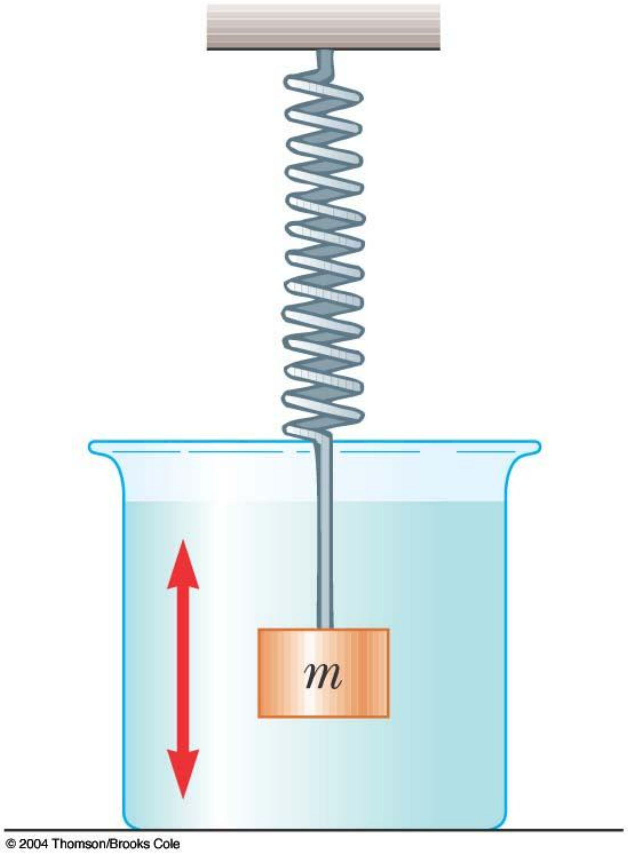
Oscilações Amortecidas

Exemplo

Um exemplo de movimento amortecido ocorre quando um corpo ligado a uma mola é imerso num líquido viscoso

A força de amortecimento pode ser expressa como $\boldsymbol{R} = -b\,\boldsymbol{v}$ em que b é uma constante

b é denominado ***coeficiente de amortecimento***



Oscilações Amortecidas

A força restauradora é – kx;

Da Segunda Lei de Newton:

$$\Sigma F_x = -k\,x - bv_x = ma_x$$

Quando a força amortecedora é pequena comparada com o valor máximo da força restauradora, podemos obter uma expressão para x;

Isto ocorre quando b é pequeno.

Oscilações Amortecidas

A posição é dada por:

$$x = Ae^{-\frac{b}{2m}t}\cos(\omega t + \phi)$$

A frequência angular será:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

Oscilações Amortecidas - Sumário

Quando a força de amortecimento é pequena, o carácter oscilatório do movimento é preservado, mas a amplitude diminui exponencialmente com o tempo;

O movimento cessará eventualmente;

A frequência angular pode assumir outra forma:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}$$

em que ω_0 é a frequência angular na ausência da força amortecedora:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Tipos de Amortecimento

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

é também chamada a ***frequência natural*** do sistema

Se $R_{max} = bv_{max} < kA$, diz-se que o sistema é ***subamortecido***;

Quando b atinge um valor crítico b_c tal que $b_c /2\ m = \omega_0$, o sistema não oscilará.

Diz-se que o sistema é ***criticamente amortecido***;

Se $R_{max} = bv_{max} > kA$ e $b/2m > \omega_0$, o sistema é ***sobreamortecido***.

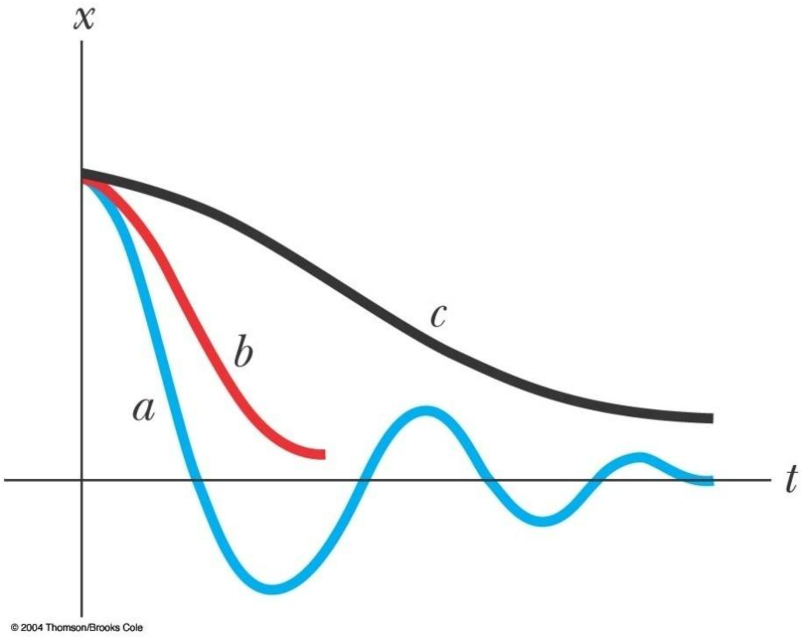
Tipos de Amortecimento

Gráficos da posição em função do tempo de:

(a) um oscilador subamortecido;

(b) um oscilador criticamente amortecido;

(c) um oscilador sobre-amortecido.



Nos casos de amortecimento crítico ou sobre-amortecimento, **não existe** frequência angular.

Oscilações Forçadas

Podemos compensar a perda de energia num sistema amortecido, aplicando uma força exterior;

A amplitude do movimento manter-se-á constante se a energia fornecida por ciclo for exactamente igual à perda de energia mecânica resultante das forças resistivas.

Oscilações Forçadas

Após a força exterior começar a actuar, a amplitude das oscilações aumentará;

Após um intervalo de tempo suficientemente elevado,

$$E_{\text{fornecida}} = E_{\text{transformada em energia interna}}$$

Eventualmente é atingido um estado estacionário e o movimento prosseguirá com amplitude constante.

Oscilações Forçadas

A amplitude das oscilações forçadas é:

$$A = \frac{F_0 / m}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}}$$

em que ω_0 é a frequência natural do oscilador não amortecido.

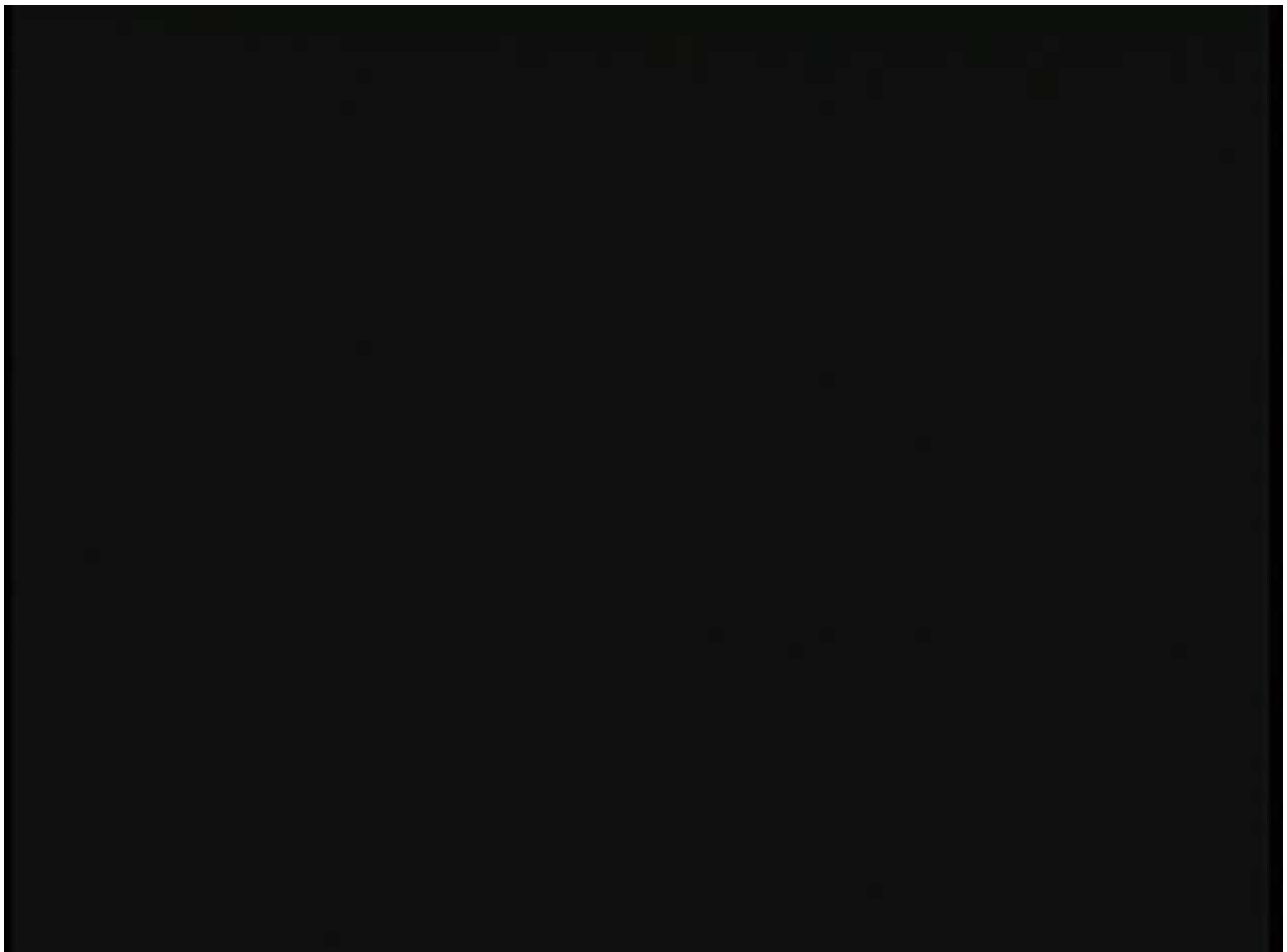
Ressonância

Quando a frequência da força exterior está próxima da frequência natural do oscilador ($\omega \approx \omega_0$), ocorre um aumento da amplitude;

Este aumento dramático da amplitude é denominado ***ressonância***;

A frequência natural, ω_0, é também denominada *frequência de ressonância* do sistema.

Ressonância



Ressonância

Na ressonância, a força aplicada está em fase com a velocidade e a potência transferida para o oscilador é máxima;

A força aplicada e a velocidade são ambas proporcionais a sin $(\omega t + \phi)$;

A potência transferida é $\vec{F} \cdot \vec{v}$

É máxima quando $\vec{F}$ e $\vec{v}$ estão em fase.

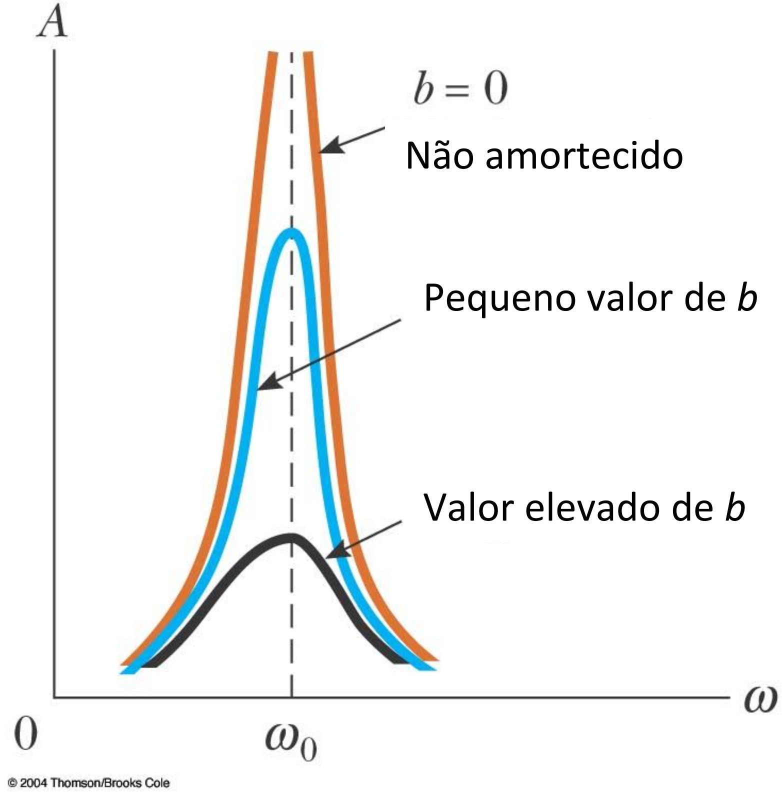
Ressonância

A Ressonância (o máximo do pico) ocorre quando a frequência da força aplicada é igual à frequência natural;

A amplitude aumenta quando o amortecimento diminui;

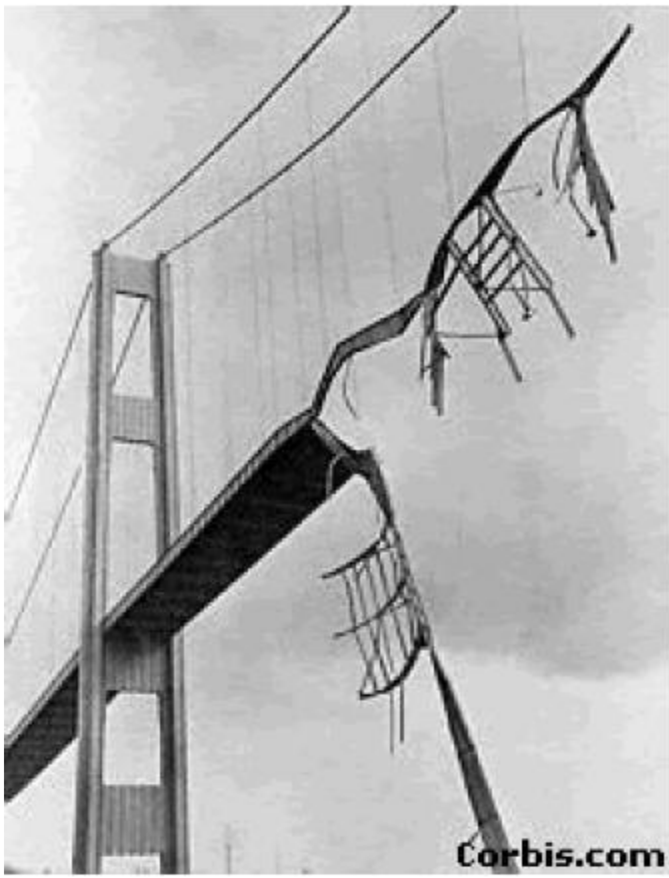
A curva alarga-se quando o amortecimento aumenta;

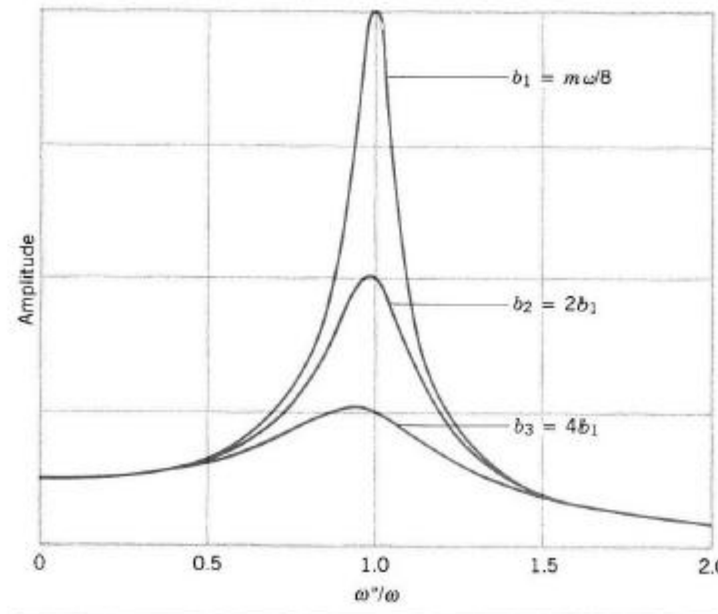
A forma da curva de ressonância depende de *b*.



Efeitos da ressonância

Colapso da ponte de Tacoma, EEUU





A amplitude é **máx.** quando a frequência imposta é ω_o

$$A = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega^2 - \omega_0^2\right)^2 + \left(\frac{b\omega}{m}\right)^2}}$$

Ressonância